ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лектор – академик РАН Е.И. Моисеев

3 курс, 6 семестр, I поток

Аудиофайлы: D:\Z0000149, Z0000151

Следующий раздел будет посвящен, в основном, гильбертовым пространствам.

Глава 6. Гильбертовы пространства

§ 1. Определение и простейшие свойства гильбертова пространства

Определение. Полное евклидово (унитарное) пространство называется гильбертовым.

Иными словами, гильбертово пространство – это банахово пространство, в котором введено скалярное произведение, согласованное с нормой.

В гильбертовом пространстве справедливы неравенство Коши-Буняковского и тождество параллелограмма

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

(доказывалось в курсе алгебры).

В дальнейшем, H – это гильбертово пространство (как правило, бесконечномерное).

Аудиофайлы: Z0000152, Z0000153

§ 2. Теорема об элементе с наименьшей нормой. Разложение гильбертова пространства в прямую ортогональную сумму подпространств

Определение. Множество называется выпуклым, если вместе с любой парой своих элементов оно содержит и соединяющий их отрезок.

Теорема об элементе с наименьшей нормой. Пусть M – замкнутое выпуклое подмножество H, тогда в M существует единственный элемент с наименьшей нормой.

Доказательство. Пусть

$$d=\inf_{x\in M}\|x\|,$$

$x_n\in M$, $\|x_n\|\to d$, тогда в силу выпуклости M $(x_n+x_m)/2\in M$, поэтому $\|(x_n+x_m)/2\|\ge d$. С другой стороны, $\|(x_n+x_m)/2\|\le\|x_n\|/2+\|x_m\|/2$. Переходя к пределу в двойном неравенстве

$$d\le\left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\|\le\frac{\|x_n\|}{2}+\frac{\|x_m\|}{2},$$

получаем, что $\|(x_n+x_m)/2\|\to d$.

Далее, в силу тождества параллелограмма

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2,$$

откуда следует, что $\|x_n - x_m\|^2 \to 0$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. В силу гильбертовости H $\exists\, \tilde{x} \in H:\ x_n \to \tilde{x}$. Легко видеть, что $\|\tilde{x}\| = d$.

Единственность: если $\exists\, x' \in H:\ \|x'\| = d$, то легко видеть, что $\|(\tilde{x} + x')/2\| = d$, откуда в силу тождества параллелограмма следует, что

$$\|\tilde{x} - x'\|^2 = 2\|\tilde{x}\|^2 + 2\|x'\|^2 - 4\left\|\frac{\tilde{x} + x'}{2}\right\|^2 = 0.$$

Теорема доказана.

Определение. Множество всех элементов, ортогональных данному множеству L, называется ортогональным дополнением к L. Обозначение: $L^{\perp}$.

Теорема о разложении гильбертова пространства. Пусть H_1 – замкнутое линейное подмножество H, тогда

$$H = H_1 + H_1^{\perp},$$

т.е. всякий элемент $x \in H$ однозначно представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_1^{\perp}$.

Замечание. Элемент x_1 называется проекцией элемента x на множество H_1, а элемент x_2 – перпендикуляром.

Достаточно убедиться, что x_1 – это элемент, доставляющий минимум расстояния между x и H_1. Единственность очевидна.

Следствие. Если $\dim H_1 = 1$, т.е. $H_1 = \{x \mid x = \lambda e, e \in H_1, \|e\| = 1\}$, то в вышеуказанном разложении $x_1 = (x, e)e$.

§ 3. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала

Лемма. Пусть линейный ограниченный функционал $f(x)$, $x \in H$, не является аннулирующим (т.е. $\exists\, x \in H: f(x) \neq 0$), тогда $\dim \operatorname{coker} f = 1$.

Доказательство. Очевидно, $\ker f \neq H$ (иначе $f \equiv 0$). Пусть $x_1, x_2 \notin \ker f$, тогда $f(x_2)x_1 - f(x_1)x_2 \in \ker f$, стало быть, $0 < \dim \operatorname{coker} f < 2$, что и требовалось доказать.

<u>Аудиофайлы: Z0000154, Z0000155</u>

Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Для любого линейного ограниченного функционала $f(x)$, $x \in H$, существует и притом единственный элемент $h \in H$ такой, что $f(x) = (x, h)$, причем $\|f\| = \|h\|$.

Доказательство. Если f аннулирующий, то $h = 0$; иначе в силу леммы

$\dim(\ker f)^{\perp}=1$. Очевидно, $\ker f$ – замкнутое линейное подпространство. По теореме о разложении гильбертова пространства $H=\ker f+(\ker f)^{\perp}$, так что $\forall\, x\in H\ \ \exists!\, x_1\in\ker f$, $x_2\in(\ker f)^{\perp}$: $x=x_1+x_2$. Но тогда $f(x)=f(x_2)$. Пусть $(\ker f)^{\perp}=L(e)$, $\|e\|=1$, тогда в силу следствия из теоремы о разложении $x_2=(x,e)e$, стало быть, $f(x)=(x,e)f(e)=(x,h)$, где $h=\overline{f(e)}\,e$.

Далее, по неравенству Коши-Буняковского $|f(x)|\le\|x\|\|h\|$, откуда следует, что $\|f\|\le\|h\|$. Положив $x=h/\|h\|$, получим противоположное неравенство, откуда следует, что $\|f\|=\|h\|$.

Единственность: если $f(x)=(x,h)=(x,\tilde{h})$, то $(x,h-\tilde{h})=0\ \ \forall\, x\in H$, и осталось положить $x=h-\tilde{h}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Соответствие между f и h взаимно однозначное и изометричное.

Следствие 2. Оператор соответствия $f\to h$ антилинейный.

Следствие 3. $H\cong H^{*}\cong H^{**}$.

§ 4. Слабая сходимость

В силу теоремы Рисса слабая сходимость последовательности $\{x_n\}$ к элементу x в H означает, что $\forall\, h\in H\ \ (x_n,h)\to(x,h)$.

Свойства слабо сходящихся последовательностей:

1^0. Если $x_n\xrightarrow{w}x$ и $\|x_n\|\to\|x\|$, то $x_n\to x$.

Достаточно заметить, что $\|x_n-x\|^2=\|x_n\|^2+\|x\|^2-2\operatorname{Re}(x_n,x)\to 0$.

2^0. Если $x_n\xrightarrow{w}x$, то $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|\ge\|x\|$.

Можно считать, что $x\ne 0$, но тогда достаточно заметить, что $\|x\|^2\leftarrow|(x_n,x)|\le\|x_n\|\|x\|$.

3^0. (Лемма Кадеца) Если $x_n\xrightarrow{w}x$, то $\exists\,\{n_k\}$: $(x_{n_1}+\ldots+x_{n_k})/k\to x$.

Не ограничивая общности, полагаем $x=0$. В силу ограниченности слабо сходящейся последовательности $\exists\, M$: $\|x_i\|\le M$. Далее, запишем:

$$\left\|\frac{x_{n_1}+\ldots+x_{n_k}}{k}\right\|^2=\frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\|x_{n_i}\|^2+2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}(x_{n_i},x_{n_j})\right).$$

Предположим, что $x_{n_1},\ldots,x_{n_j}$ уже выбраны. Выберем $x_{n_{j+1}}$ так, чтобы $\left|(x_{n_i},x_{n_{j+1}})\right|\le 1/(j+1)$, $i=1,\ldots,j$. Тогда

$$\frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\|x_{n_i}\|^2+2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}(x_{n_i},x_{n_j})\right)\le\frac{1}{k^2}\left(kM^2+2k\right)\to 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Полные, замкнутые, ортонормированные системы

Предполагаем сепарабельность H.

Определение. Система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется замкнутой, если $\forall\, x \in H$, $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n$: $\|x - \alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_n x_n\| < \varepsilon$.

Определение. Система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется полной, если единственным элементом, ортогональным ко всем x_k, является нулевой элемент.

Теорема. В гильбертовом пространстве понятия замкнутости и полноты эквивалентны.

Доказательство. Замкнутость $\Rightarrow$ полнота: пусть $(x, x_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Зафиксируем $\forall\, \varepsilon > 0$. Пусть $\|x - \alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_n x_n\| < \varepsilon$, тогда

$$\|x - \alpha_1 x_1 - \dots - \alpha_n x_n\|^2 = \|x\|^2 + |\alpha_1|^2 \|x_1\|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 \|x_n\|^2 < \varepsilon^2,$$

стало быть, $\|x\| < \varepsilon$, откуда в силу произвольности ε вытекает, что $x = 0$.

Полнота $\Rightarrow$ замкнутость: пусть $(x, x_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ $\Rightarrow$ $x = 0$. Рассмотрим множество всевозможных линейных комбинаций вида $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Это подпространство, обозначим его через H_1. По теореме о разложении гильбертова пространства $H = \overline{H_1} + \overline{H_1}^{\perp}$. По определению $\overline{H_1}^{\perp}$ состоит из элементов, ортогональных $\overline{H_1}$, или H_1, следовательно, $\overline{H_1}^{\perp} = \{0\}$ в силу предположения о полноте. Стало быть, $H = \overline{H_1}$. Теорема доказана.

Свойства ортонормированных систем.

1^0. Если $x \perp y$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора).

2^0. Если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$, то $x - S_n \perp e_k$, $k = 1, \dots, n$.

Замечание. Числа $x_k = (x, e_k)$ называются коэффициентами Фурье.

<u>Аудиофайлы: Z0000156, Z0000157</u>

Задача о наилучшем приближении: приблизить заданный элемент конечными линейными комбинациями заданных элементов ортонормированной системы:

$$\min_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \|x - \alpha_1 e_1 - \dots - \alpha_n e_n\|.$$

Легко видеть, что наилучшее приближение обеспечивают коэффициенты Фурье $\alpha_k = x_k$, где $x_k = (x, e_k)$.

Неравенство Бесселя: так как $0 \le \|x - S_n\|^2 = \left\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$, то

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 \le \|x\|^2 \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 \le \|x\|^2 .$$

Из неравенства Бесселя и теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала вытекает, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2 \le \|x\|^2 \;\Rightarrow\; x_k \to 0 .$$

Легко видеть, что неравенство Бесселя превращается в равенство (равенство Парсеваля) тогда и только тогда, когда система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна (см. теорему об эквивалентности полноты и замкнутости).

Докажем теперь три теоремы о свойствах ортонормированных систем.

Теорема Рисса-Фишера. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система и

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 < \infty ,$$

где $c_1, c_2, \ldots$ – произвольные комплексные числа, тогда $\exists!\, x \in H : \left(x, e_k\right) = c_k$, $k = 1, 2, \ldots$, причем

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 .$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$. Легко видеть, что она фундаментальна, поэтому $\exists\, x = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. При $n > k$

$$\left(x, e_k\right) = \left(x - s_n, e_k\right) + \left(s_n, e_k\right) = c_k .$$

Единственность вытекает из полноты системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Теорема доказана.

Теорема об ортогонализации по Шмидту. В сепарабельном гильбертовом пространстве существует полная ортонормированная система.

Доказательство. Выбираем счетную всюду плотную систему и применяем к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта (если на очередном шаге получается нулевой элемент, то его отбрасываем). Легко видеть, что построенная система замкнута, а значит, полна. Теорема доказана.

Теорема об изоморфизме. Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны с изометрией между собой.

Доказательство. Пусть дано бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Построим в нем полную ортонормированную систему (это возможно в силу предыдущей теоремы) и поставим всякому элементу этого пространства набор его коэффициентов Фурье. Сумма квадратов этих коэффициентов равна квадрату нормы этого элемента. Отсюда вытекает изоморфизм с изометрией этого пространства пространству l_2 . Теорема доказана.

Замечание. В силу изометрии сохраняется и скалярное произведение, а значит, в вещественном случае сохраняются углы.

Глава 7. Пространства Соболева. Обобщенные решения краевых задач

§ 1. Пространство $W_2^1(0,1)$

Рассматриваем вещественный случай. В пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций введем скалярное произведение по правилу

$$(u,v)_{W_2^1}=\int_0^1 u(t)v(t)dt+\int_0^1 u'(t)v'(t)dt=(u,v)_{L_2}+(u',v')_{L_2}.$$

Пополним это пространство по норме, порожденной этим скалярным произведением. Рассмотрим фундаментальную по норме $W_2^1(0,1)$ последовательность $\{u_n(t)\}$:

$$\|u_n-u_m\|_{W_2^1}\xrightarrow[m,\,n\to\infty]{}0.$$

Так как

$$\|u_n-u_m\|_{W_2^1}=\|u_n-u_m\|_{L_2}+\|u_n'-u_m'\|_{L_2},$$

то $\{u_n\}$ фундаментальна в $L_2(0,1)$ и в силу полноты этого пространства имеет предел u; аналогично, $\{u_n'\}$ имеет предел v в $L_2(0,1)$. Функцию $v(t)$ будем называть обобщенной производной функции $u(t)$.

Покажем корректность этого определения. Пусть $\tilde{u}_n\to u$ в $L_2(0,1)$, $\tilde{u}_n'\to\tilde{v}$ в $L_2(0,1)$, тогда $w_n\equiv\tilde{u}_n-u_n\to 0$, $w_n'\to w\equiv\tilde{v}-v$. Но тогда, с одной стороны,

$$\int_0^1 w_n'(t)\sin(\pi kt)dt\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1 w(t)\sin(\pi kt)dt;$$

с другой –

$$\int_0^1 w_n'(t)\sin(\pi kt)dt=-\pi k\int_0^1 w_n(t)\cos(\pi kt)dt\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Так как система синусов полна в $L_2(0,1)$, то $w\equiv 0$, что и требовалось доказать.

Теорема вложения. $W_2^1(0,1)\subset C[0,1]$, причем $\exists\, C>0:\ \|u\|_C\le C\|u\|_{W_2^1}$.

Доказательство. Пусть $u\in W_2^1(0,1)$, тогда нужно доказать, что $\exists\,\tilde{u}\in C[0,1]$: $\tilde{u}=u$ п.в. и $\|\tilde{u}\|_C\le C\|\tilde{u}\|_{W_2^1}$. Доказательство проведем в несколько этапов.

Пусть $\{u_n(t)\}$ фундаментальна в $W_2^1(0,1)$. Покажем, что $\{u_n(0)\}$ фундаментальна. В самом деле,

$$u_n(0)=u_n(t)-\int_0^t u_n'(\tau)d\tau,\ u_n(0)-u_m(0)=u_n(t)-u_m(t)-\int_0^t(u_n'(\tau)-u_m'(\tau))d\tau,$$

$$\left(u_n(0)-u_m(0)\right)^2 \le 2\left(u_n(t)-u_m(t)\right)^2 + 2\left(\int_0^t \left(u_n'(\tau)-u_m'(\tau)\right)d\tau\right)^2 .$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\left(u_n(0)-u_m(0)\right)^2 \le 2\left(u_n(t)-u_m(t)\right)^2 + 2\int_0^1 \left(u_n'(\tau)-u_m'(\tau)\right)^2 d\tau .$$

Проинтегрируем это неравенство в пределах от нуля до единицы:

$$\left(u_n(0)-u_m(0)\right)^2 \le 2\int_0^1 \left(u_n(t)-u_m(t)\right)^2 dt + 2\int_0^1 \left(u_n'(\tau)-u_m'(\tau)\right)^2 d\tau = 2\left\|u_n-u_m\right\|_{W_2^1}^2 ,$$

откуда и следует фундаментальность $\{u_n(0)\}$.

Теперь покажем, что $\{u_n(t)\}$ фундаментальна в $C[0,1]$, т.е. сходится равномерно. Так как

$$u_n(t)-u_m(t) = u_n(0)-u_m(0) + \int_0^t \left(u_n'(\tau)-u_m'(\tau)\right)d\tau ,$$

$$\left(u_n(t)-u_m(t)\right)^2 \le 2\left(u_n(0)-u_m(0)\right)^2 + 2\left(\int_0^t \left(u_n'(\tau)-u_m'(\tau)\right)d\tau\right)^2 ,$$

$$\left(u_n(t)-u_m(t)\right)^2 \le 2\left(u_n(0)-u_m(0)\right)^2 + 2\int_0^1 \left(u_n'(\tau)-u_m'(\tau)\right)^2 d\tau ,$$

то

$$\left\|u_n-u_m\right\|_C^2 \le 2\left(u_n(0)-u_m(0)\right)^2 + 2\left\|u_n-u_m\right\|_{W_2^1}^2 ,$$

откуда и следует фундаментальность $\{u_n(t)\}$ в $C[0,1]$. Обозначим ее предел (непрерывную функцию) через $\tilde{u}(t)$.

Теперь докажем оценку для норм. Запишем:

$$u_n(0) = u_n(t) - \int_0^t u_n'(\tau)d\tau ,\ u_n^2(0) \le 2u_n^2(t) + 2\left(\int_0^t u_n'(\tau)d\tau\right)^2 \le 2u_n^2(t) + 2\int_0^1 \left(u_n'(\tau)\right)^2 d\tau .$$

Проинтегрируем это неравенство в пределах от нуля до единицы:

$$u_n^2(0) \le 2\int_0^1 u_n^2(t)dt + 2\int_0^1 \left(u_n'(\tau)\right)^2 d\tau = 2\left\|u_n\right\|_{W_2^1}^2 ,\ \left|u_n(0)\right| \le \sqrt{2}\left\|u_n\right\|_{W_2^1} ,\ \left|\tilde{u}(0)\right| \le \sqrt{2}\left\|\tilde{u}\right\|_{W_2^1} .$$

Далее,

$$u_n(t) = u_n(0) + \int_0^t u_n'(\tau)d\tau ,\ u_n^2(t) \le 2u_n^2(0) + 2\left(\int_0^t u_n'(\tau)d\tau\right)^2 \le 2u_n^2(0) + 2\int_0^1 \left(u_n'(\tau)\right)^2 d\tau ,$$

$$\left\|u_n\right\|_C^2 \le 4\left\|u_n\right\|_{W_2^1}^2 + 2\left\|u_n\right\|_{W_2^1}^2 = 6\left\|u_n\right\|_{W_2^1}^2 ,\ \left\|\tilde{u}\right\|_C \le \sqrt{6}\left\|\tilde{u}\right\|_{W_2^1} .$$

Теорема доказана.

Аудиофайлы: Z0000158, Z0000159

Теорема о компактности вложения. Вложение $W_2^1(0,1) \subset C[0,1]$ компактно.

Доказательство. Достаточно проверить критерий Арцела для последовательности $\{\tilde{u}_n(t)\}$, которая п.в. совпадает с $\{u_n(t)\}$. Пусть $\|\tilde{u}_n\|_{W_2^1} \le C_0$.

Равномерная ограниченность: $\|\tilde{u}_n\|_C \le C\|\tilde{u}_n\|_{W_2^1} \le CC_0$.

Равностепенная непрерывность:

$$\tilde{u}_n(t+\delta) - \tilde{u}_n(t) = \int_t^{t+\delta} \tilde{u}_n'(\tau)\,d\tau,$$

$$\left|\tilde{u}_n(t+\delta) - \tilde{u}_n(t)\right| \le \sqrt{\delta}\left(\int_t^{t+\delta} \left|\tilde{u}_n'(\tau)\right|^2 d\tau\right)^{1/2} \le \sqrt{\delta}\|\tilde{u}_n\|_{W_2^1} \le C_0\sqrt{\delta}\,.$$

Теорема доказана.

Следствие. Из последовательности, ограниченной в $W_2^1(0,1)$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(0,1)$.

§ 2. Обобщенные решения краевых задач

Обобщенные решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Обозначим через

$$\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$$

замыкание множества непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0,1]$, в метрике пространства $W_2^1(0,1)$.

Первая краевая задача. Рассмотрим краевую задачу (1)

$$(a(t)u'(t))' - c(t)u(t) = -f(t),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

где $a(t),\ c(t)$ – заданные на интервале $(0,1)$ измеримые ограниченные функции, $0 < a_0 \le a(t) \le a_1 < +\infty$, $0 \le c_0 \le c(t) \le c_1 < +\infty$, $f(t) \in L_2(0,1)$.

Определение. Обобщенным решением краевой задачи (1) называется функция

$$u(t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1),$$

удовлетворяющая тождеству (2)

$$\int_0^1 \left(a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)\right)dt = \int_0^1 f(t)v(t)\,dt$$

для любой функции

$$v(t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1).$$

Замечание. Тождество (2) получается путем умножения обеих частей тождества для классического решения на функцию $v(t)$ и интегрирования по частям.

Теорема 1. Обобщенное решение краевой задачи (1) единственно.

Доказательство. Положим $v(t)=u(t)$ в однородной задаче:

$$\int_0^1 \left(a(t)(u'(t))^2 + c(t)(u(t))^2\right)dt = 0,$$

следовательно,

$$\int_0^1 a(t)(u'(t))^2\,dt = 0.$$

Из условия $a(t) \ge a_0 > 0$ вытекает, что $u'(t)=0$ п.в. Для функций из $\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ справедлива формула Ньютона-Лейбница: $\tilde{u}(t)=u(t)$ п.в.,

$$\tilde{u}(t) = \int_0^t \tilde{u}'(\tau)d\tau,$$

откуда следует, что $\tilde{u}(t)=0$ п.в. Теорема доказана.

Замечание. Применяя неравенство Коши-Буняковского к обеим частям формулы Ньютона-Лейбница, получаем

$$|\tilde{u}(t)|^2 \le \int_0^1 (\tilde{u}'(\tau))^2\,d\tau,$$

откуда следует, что

$$\int_0^1 \tilde{u}^2(t)dt \le \int_0^1 (\tilde{u}'(\tau))^2\,d\tau.$$

Таким образом, для функций из $\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ справедливо т.н. неравенство Пуанкаре

$$\|u\|_{L_2} \le \|u'\|_{L_2}.$$

Теорема 2. Обобщенное решение краевой задачи (1) существует.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Введем новое скалярное произведение в пространстве, которое будем пока обозначать через H:

$$(u,v)_H = \int_0^1 \left(a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)\right)dt.$$

Выполнение аксиом скалярного произведения легко проверяется (см. доказательство теоремы 1). Норма, порождаемая этим скалярным произведением, эквивалентна норме в $W_2^1(0,1)$ в силу оценок (используем неравенство Пуанкаре)

$$\|u\|_H^2 \le \max\{a_1, c_1\}\|u\|_{W_2^1}^2,\ \|u\|_H^2 \ge a_0\|u'\|_{L_2}^2 \ge \frac{a_0}{2}\|u'\|_{L_2}^2 + \frac{a_0}{2}\|u\|_{L_2}^2 = \frac{a_0}{2}\|u\|_{W_2^1}^2.$$

Следовательно, замыкание по этой норме дает требуемое пространство, т.е.

$$H = \overset{0}{W}{}_2^1(0,1).$$

В пространстве H рассмотрим линейный ограниченный функционал

$$F(v) = \int_0^1 f(t)v(t)dt$$

(ограниченность вытекает из оценки $|F(v)| \le \|f\|_{L_2}\|v\|_{L_2} \le \|f\|_{L_2}\|v\|_{W_2^1} \le C\|f\|_{L_2}\|v\|_H$).

Следовательно, по теореме Рисса $\exists\, h \in H$: $F(v) = (v, h)_H$, $\|F\| = \|h\|_H$. Легко видеть, что h и есть искомое обобщенное решение задачи (1), причем справедлива априорная оценка $\|h\|_H \le C\|f\|_{L_2}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Оператор $A : L_2(0,1) \to \overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$, действующий по правилу $Af = u$, линейный и ограниченный.

Следствие 2. Оператор A компактный (вытекает из теоремы вложения).

Следствие 3. Оператор A самосопряженный: пусть $v = Ag$, где $g \in L_2(0,1)$, тогда $(u, v)_H = (f, v) = (f, Ag)$; с другой стороны, $(u, v)_H = (v, u)_H = (g, u) = (g, Af) = (Af, g)$, откуда следует, что $(f, Ag) = (Af, g)$.

Вторая краевая задача. Рассмотрим краевую задачу (3)

$$(a(t)u'(t))' - c(t)u(t) = -f(t),$$

$$u'(0) = u'(1) = 0,$$

где $a(t),\ c(t)$ – заданные на интервале $(0,1)$ измеримые ограниченные функции, $0 < a_0 \le a(t) \le a_1 < +\infty$, $0 < c_0 \le c(t) \le c_1 < +\infty$, $f(t) \in L_2(0,1)$.

Замечание. Обратите внимание, что, в отличие от первой краевой задачи, здесь требуется строгое неравенство $c_0 > 0$: при $c(t) \equiv 0$ у однородной второй краевой задачи существует нетривиальное решение (константа).

Определение. Обобщенным решением краевой задачи (3) называется функция $u(t) \in W_2^1(0,1)$, удовлетворяющая тождеству (2)

$$\int_0^1 (a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t))dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt$$

для любой функции $v(t) \in W_2^1(0,1)$.

Теорема 3. Обобщенное решение краевой задачи (3) существует и единственно.

Единственность доказывается как в теореме 1: положив $v(t) = u(t)$ в однородной задаче, получим

$$0 = \int_0^1 \left(a(t)(u'(t))^2 + c(t)(u(t))^2\right)dt \ge c_0 \int_0^1 (u(t))^2\, dt,$$

откуда вытекает, что $u(t)=0$ п.в., а существование – как в теореме 2 для $H=W_2^1(0,1)$.

Следствие. Оператор $A: L_2(0,1)\to W_2^1(0,1)$, действующий по правилу $Af=u$, линейный, ограниченный, компактный и самосопряженный.

Аудиофайл: Z0000160

Обобщенные решения краевых задач для уравнений в частных производных.

Первая краевая задача. Рассмотрим следующую первую краевую задачу (4) для эллиптического оператора:

$$\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-c(x)u=-f(x),\ x\in D,$$

$$u\big|_{\partial D}=0,$$

где $D\subset \mathrm{R}^n$ – ограниченная область, $a_{ij}(x),\ c(x)$ – измеримые ограниченные функции,

$$a_0|\xi|^2\le\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le a_1|\xi|^2,$$

$0<a_0\le a_1<+\infty,\ 0\le c_0\le c(x)\le c_1<+\infty,\ f(x)\in L_2(D)$.

По аналогии с одномерным случаем введем пространство

$$\overset{0}{W}{}_2^1(D).$$

Определение. Обобщенным решением краевой задачи (4) называется функция

$$u(x)\in\overset{0}{W}{}_2^1(D),$$

удовлетворяющая тождеству (5)

$$\int_D\left(\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+c(x)uv\right)dx=\int_D fv\,dx$$

для любой функции

$$v(x)\in\overset{0}{W}{}_2^1(D).$$

Утверждение (неравенство Пуанкаре). Для любой функции

$$u(x)\in\overset{0}{W}{}_2^1(D)$$

справедливо неравенство

$$\int_D u^2dx\le C\int_D(\nabla u)^2dx,$$

где константа C зависит только от области D.

Замечание. В пространстве $W_2^1(D)$ это неравенство уже неверно: достаточно положить $u(x)\equiv\mathrm{const}\ne 0$.

Доказательство. Для простоты рассмотрим двумерный случай. Пусть

$D \subset I = [0,1]\times[0,1]$, $u(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль на ∂D и продолженная нулем на I , тогда

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, \eta) d\eta ,$$

$$u^2(x, y) \le y \int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, \eta) \right)^2 d\eta \le \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, \eta) \right)^2 d\eta ,$$

$$\int_0^1\int_0^1 u^2(x, y) dxdy \le \int_0^1 dx \int_0^1 \left(u'_y(x, \eta)\right)^2 d\eta \le \int_0^1\int_0^1 \left(\left(u'_x(x, y)\right)^2 + \left(u'_y(x, y)\right)^2\right) dxdy = \int_0^1\int_0^1 \left(\nabla u(x, y)\right)^2 dxdy .$$

Утверждение доказано.

Теорема. Обобщенное решение краевой задачи (4) единственно.

Достаточно заметить, что для однородной задачи при $v(x) = u(x)$

$$0 = \int_D \left(\sum_{i,\, j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u^2 \right) dx \ge a_0 \int_D (\nabla u)^2 dx$$

и в силу неравенства Пуанкаре

$$\int_D (\nabla u)^2 dx = \frac{1}{1+C} \int_D (\nabla u)^2 dx + \frac{C}{1+C} \int_D (\nabla u)^2 dx \ge \frac{1}{1+C} \left(\int_D (\nabla u)^2 dx + \int_D u^2 dx \right) = \frac{1}{1+C} \|u\|^2_{W_2^1} .$$

Теорема. Обобщенное решение краевой задачи (4) существует.

Как и в одномерном случае, вводим скалярное произведение

$$(u, v)_H = \int_D \left(\sum_{i,\, j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + c(x) uv \right) dx ,$$

убеждаемся, что

$$H = \overset{0}{W}{}_2^1(0,1),$$

и применяем теорему Рисса.

Следствие 1. Оператор $A : L_2(D) \to \overset{0}{W}{}_2^1(D)$, действующий по правилу $Af = u$, линейный и ограниченный.

Следствие 2. Оператор $A : L_2(D) \to L_2(D)$ компактный, т.е. если $\| f_n \|_{L_2} \le M$, то из $\{Af_n\}$ можно выбрать сходящуюся в $L_2(D)$ подпоследовательность. Воспользуемся теоремой Арцела. Равномерная ограниченность очевидна. Докажем равностепенную непрерывность. Так как

$$u(x, y) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x, \eta) d\eta ,$$

то

$$\Delta u = u(x + \Delta_1, y + \Delta_2) - u(x, y) = u(x + \Delta_1, y + \Delta_2) - u(x + \Delta_1, y) + u(x + \Delta_1, y) - u(x, y) =$$

$$= \int_{y}^{y+\Delta_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x+\Delta_1, \eta)d\eta + \int_{x}^{x+\Delta_1} \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y)d\xi ,$$

$$|\Delta u|^2 \le \Delta_2 \int_{y}^{y+\Delta_2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x+\Delta_1, \eta) \right)^2 d\eta + \Delta_1 \int_{x}^{x+\Delta_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right)^2 d\xi ,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 |\Delta u|^2 dxdy \le |\Delta| \|\nabla u\|_{L_2}^2 .$$

Следствие 3. Оператор A самосопряженный: пусть $v = Ag$, где $g \in L_2(D)$, тогда $(u, v)_H = (f, v) = (f, Ag)$; с другой стороны, $(u, v)_H = (v, u)_H = (g, u) = (g, Af) = (Af, g)$, откуда следует, что $(f, Ag) = (Af, g)$.

Вторая краевая задача. По аналогии с одномерным случаем.

Обобщенное решение начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Ограничимся постановкой задачи и доказательством единственности ее обобщенного решения. Пусть $D \subset \mathrm{R}^N$ – ограниченная область, $Q_T = D \times (0, T)$, Δ – оператор Лапласа по пространственным переменным, $f \in L_2(Q_T)$, $\varphi \in W_2^1(D)$, $\psi \in L_2(D)$, $d\tau = dxdt$, тогда рассмотрим следующую задачу (6):

$$Lu \equiv u_{tt} - \Delta u = f(x, t),\ (x, t) \in Q_T ,$$

$$u|_{\partial D \times (0, T)} = 0 ,\ u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Определение. Функция $u \in W_2^1(Q_T)$ называется обобщенным решением начально-краевой задачи (6), если

$$\int_{Q_T} uL\Phi d\tau + \int_D \varphi(x)\Phi_t(x, 0)dx - \int_D \psi(x)\Phi(x, 0)dx = \int_{Q_T} f\Phi d\tau$$

$$\forall\ \Phi \in C^2(\overline{Q_T}),\ \Phi|_{\partial D \times (0, T)} = 0 ,\ \Phi(x, T) = 0 ,\ \Phi_t(x, T) = 0 .$$

Теорема. Обобщенное решение задачи (6) единственно.

Доказательство. Обозначим через $v_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, собственные функции первой краевой задачи для оператора Лапласа в области D:

$$\Delta v_n + \lambda_n v_n = 0 ,\ x \in D ,$$

$$v_n|_{\partial D} = 0 .$$

Известно, что эти функции дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ и образуют полную ортонормированную систему. В качестве пробных функций возьмем

$$\Phi_{n, m}(x, t) = v_n(x)\eta_{n, m}(t),\ n, m = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\eta_{n, m}(t) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(T-t) - \sin \pi m(1 - t/T)}{\sqrt{\lambda_n} - \pi m/T} - \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(T-t) + \sin \pi m(1 - t/T)}{\sqrt{\lambda_n} + \pi m/T} ,\ \sqrt{\lambda_n} \ne \pi m/T ;$$

$$\eta_{n,m}(t)=(T-t)\cos\sqrt{\lambda_n}(T-t)-\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(T-t)}{\sqrt{\lambda_n}},\ \sqrt{\lambda_n}=\pi m/T.$$

Легко видеть, что $\eta_{n,m}(T)=\eta'_{n,m}(T)=0$.

Так как

$$\eta''_{n,m}(t)=-\frac{\lambda_n\sin\sqrt{\lambda_n}(T-t)-(\pi m/T)^2\sin\pi m(1-t/T)}{\sqrt{\lambda_n}-\pi m/T}+\frac{\lambda_n\sin\sqrt{\lambda_n}(T-t)+(\pi m/T)^2\sin\pi m(1-t/T)}{\sqrt{\lambda_n}+\pi m/T},$$

то

$$L\Phi_{n,m}=v_n(x)\left(\eta''_{n,m}(t)+\lambda_n\eta_{n,m}(t)\right)=-2\sqrt{\lambda_n}v_n(x)\sin\pi m(1-t/T).$$

Функции в правой части последнего равенства образуют полную ортогональную систему в Q_T, откуда и вытекает единственность решения. Теорема доказана.

Глава 8. Компактные (вполне непрерывные) операторы в гильбертовом пространстве

H – гильбертово пространство, $A:H\to H$ – линейный ограниченный оператор.

§ 1. Сопряженный оператор

Определение. Оператор $B:H\to H$ называется сопряженным к оператору A, если

$$(Ax,y)=(x,By)\ \ \forall\, x,y\in H.$$

Обозначение: A^*.

Теорема. $\exists!\,A^*$ – линейный ограниченный, $\|A^*\|=\|A\|$.

Линейность легко доказывается, а остальное вытекает из теоремы Рисса, если рассмотреть функционал $f(x)=(Ax,y)$ (легко видеть, что он линейный и ограниченный).

§ 2. Вполне непрерывный оператор

Лемма. Если $x_n\xrightarrow{w}x$, то $Ax_n\xrightarrow{w}Ax$.

Достаточно заметить, что $(Ax_n,y)=(x_n,A^*y)\to(x,A^*y)=(Ax,y)$.

Замечание. Пример тождественного оператора показывает, что не всякий ограниченный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность в последовательность, сходящуюся по норме.

Определение. Оператор называется вполне непрерывным, если он любую слабо сходящуюся последовательность переводит в последовательность, сходящуюся по норме.

Очевидно, что вполне непрерывный оператор ограничен, т.е. непрерывен.

Теорема. Сопряженный к вполне непрерывному вполне непрерывен.

Достаточно заметить, что если $x_n\xrightarrow{w}x$, то

$$\|A^*x_n-A^*x\|^2=(A^*(x_n-x),A^*(x_n-x))=(AA^*(x_n-x),x_n-x)\le\|A(A^*(x_n-x))\|\|x_n-x\|,$$

последовательность $\{x_n\}$ ограничена, последовательность $\{A^*(x_n-x)\}$ сходится слабо, поэтому последовательность $\{A(A^*(x_n - x))\}$ сходится по норме.

§ 3. Компактный оператор

Определение. Оператор (не обязательно линейный) называется компактным, если он любое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

Легко видеть, что компактный оператор ограничен.

Теорема. Линейный оператор вполне непрерывный тогда и только тогда, когда он компактный.

$\Rightarrow$: вытекает из того, что из любой ограниченной последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

<u>Аудиофайлы: Z0000161, Z0000162</u>

$\Leftarrow$: от противного. Пусть $x_n \xrightarrow{w} x$, $Ax_n \not\to Ax$ (заметим, что в силу ограниченности оператора $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$, поэтому $\{Ax_n\}$ может сходиться только к Ax), тогда $\exists\, \varepsilon > 0$ и $\exists \{n_k\}$:

$$\left\| Ax_{n_k} - Ax \right\| \geq \varepsilon .$$

Так как $\{x_{n_k}\}$ сходится слабо, то она ограничена. Следовательно, $\{Ax_{n_k}\}$ предкомпактна, т.е. из нее можно выбрать фундаментальную подпоследовательность, что противоречит вышеприведенному неравенству. Теорема доказана.

§ 4. Примеры вполне непрерывных (компактных) операторов в гильбертовом пространстве

Рассмотрим примеры компактных операторов.

Пример 1. Произведение компактного и ограниченного операторов (в любом порядке).

Пример 2. Конечномерный оператор ($\operatorname{rg} A \equiv \dim R(A) < \infty$).

Пример 3. Операторы, возникшие в ходе изучения обобщенных решений.

Пример 4. $H = l_2$, $A(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots)$, $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$.

Ограниченность и компактность оператора A вытекают из неравенства Коши-Буняковского (заметим, что $\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2}$).

Пример 5. $H = L_2(D)$,

$$(Ax)(t) = \int_D K(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad \int_D \int_D |K(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty .$$

Ограниченность и компактность оператора A вытекают из неравенства Коши-Буняковского.

§ 5. Приближение вполне непрерывных (компактных) операторов

Теорема. Если A ограничен, $\{A_n\}$ – последовательность компактных операторов, $\|A_n - A\| \to 0$, то A компактный.

Замечание. Таким образом, ограниченный, но не компактный оператор нельзя приблизить по норме компактным оператором.

Доказательство. Воспользуемся доказанным ранее признаком предкомпактности: покажем, что $\forall\, \varepsilon > 0$ существует предкомпактная ε-сеть. Такой сетью будет множество $\{A_n x\}$: $\|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\|\|x\| \le \varepsilon C$ при достаточно больших n. Теорема доказана.

Замечание. Если H бесконечномерно и сепарабельно, $\{e_k\}$ – ортонормированный базис, $P_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$, $R_n x = \sum_{k=n+1}^{\infty} (x, e_k) e_k$, то $P_n + R_n = E$, $\|P_n x - x\| \to 0$, но $\|P_n - E\| \not\to 0$ (последовательность проекторов сходится поточечно, но не сходится по норме). Кроме того, $P_n^* = P_n$, $R_n^* = R_n$.

Теорема. Если H сепарабельно, A компактный, то $\|A - P_n A P_n\| \to 0$.

Замечание. Матричная интерпретация: аппроксимация бесконечномерных матриц конечномерными.

Лемма. Если A компактный, то $\exists\, z \in H$, $\|z\| = 1$: $\|A\| = \|Az\|$.

Доказательство. Пусть $\|x_n\| = 1$, $\|Ax_n\| \to \|A\|$, тогда выберем (в силу ограниченности $\{x_n\}$) $\{n_k\}$: $x_{n_k} \xrightarrow{w} z$. В силу компактности оператора $Ax_{n_k} \to Az$, следовательно, $\|Az\| = \|A\|$. Так как $\|Az\| \le \|A\|\|z\|$, то $\|z\| \ge 1$. Ранее было доказано, что $\underline{\lim}\|x_{n_k}\| \ge \|z\|$, откуда и вытекает, что $\|z\| = 1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Сначала докажем, что если $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, то $R_n x_n \xrightarrow{w} 0$: $\forall\, y \in H$ $\;|(R_n x_n, y)| = |(x_n, R_n y)| \le \|x_n\|\|R_n y\| \to 0$.

Далее,

$$\|A - P_n A P_n\| = \|P_n A(P_n + R_n) + R_n A - P_n A P_n\| = \|P_n A R_n + R_n A\| \le \|P_n A R_n\| + \|R_n A\|.$$

Так как $P_n A R_n$ компактен, то $\exists\, x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$: $\|P_n A R_n\| = \|P_n A R_n x_n\|$. Так как $R_n x_n \xrightarrow{w} 0$, то $AR_n x_n \to 0$, $\|P_n A R_n\| \to 0$.

Так как $\|R_n A\| = \|A^* R_n\|$, $A^* R_n$ компактен, то, аналогично, $\|A^* R_n\| \to 0$. Теорема доказана.

Глава 9. Теория Фредгольма для вполне непрерывных операторов

В этой главе будем рассматривать разрешимость операторных уравнений вида $Ax - \lambda x = y$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Начнем с изучения операторов вида $T = E - A$, где A – вполне непрерывный оператор.

§ 1. Третья теорема Фредгольма

Теорема. $\exists\, a > 0: \ \|Tx\| \geq a\|x\| \quad \forall\, x \perp \ker T$.

Доказательство. От противного: пусть $\exists \{x_n\}, \ \|x_n\| = 1, \ x_n \perp \ker T: \ \|Tx_n\| \to 0$, тогда $\exists \{n_k\}: \ x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Так как $x_{n_k} = Tx_{n_k} + Ax_{n_k}$, $Ax_{n_k} \to Ax$, $Tx_{n_k} \to 0$, то $x_{n_k} \to x$, $\|x\| = 1$. Переходя к пределу, получаем, что $x = Ax$, т.е. $x \in \ker T$. С другой стороны, так как $x_n \perp \ker T$, то и $x \perp \ker T$ – противоречие. Теорема доказана.

<u>Аудиофайлы: Z0000163, Z0000164, Z0000165</u>

Теорема. $R(T)$ замкнуто.

Доказательство. Пусть $y_n \in R(T), \ y_n \to y$, тогда $\exists\, x_n: \ y_n = Tx_n$. В силу замкнутости ядра справедливо представление $H = \ker T \oplus (\ker T)^{\perp}$. Представим в виде $x_n = x_n' + x_n''$, где $x_n' \in \ker T$, $x_n'' \in (\ker T)^{\perp}$, тогда $y_n = Tx_n''$. По предыдущей теореме $\exists\, a > 0: \ \|y_n\| = \|Tx_n''\| \geq a\|x_n''\|$, или $\|y_m - y_n\| \geq a\|x_m'' - x_n''\|$ в силу линейности оператора. Так как $\{y_n\}$ фундаментальна, то и $\{x_n''\}$ фундаментальна. Пусть $x_n'' \to x$, тогда, переходя к пределу в равенстве $y_n = Tx_n''$, получаем $y = Tx$, т.е. $y \in R(T)$. Теорема доказана.

Теорема. Если B – линейный ограниченный оператор, то справедливо разложение в прямую ортогональную сумму

$$H = \ker B^* \oplus \overline{R(B)} = \ker B \oplus \overline{R(B^*)}.$$

Доказательство. $H = \ker B^* \oplus (\ker B^*)^{\perp}$. Пусть $y \in R(B)$, тогда $\exists\, x: \ y = Bx$. Пусть $z \in \ker B^*$, тогда $(y, z) = (Bx, z) = (x, B^*z) = 0 \ \Rightarrow \ R(B) \subset (\ker B^*)^{\perp} \ \Rightarrow \ \overline{R(B)} \subset (\ker B^*)^{\perp}$.

Докажем обратное включение. Достаточно доказать, что $\overline{R(B)}^{\perp} \subset \ker B^*$. Пусть $y \in \overline{R(B)}^{\perp}$, тогда $y \perp R(B)$, т.е. $\forall\, x \in H \ \ 0 = (Bx, y) = (x, B^*y) \ \Rightarrow B^*y = 0 \ \Rightarrow y \in \ker B^*$.

Второе разложение вытекает из замены B на B^*. Теорема доказана.

Докажем теперь основное утверждение этого параграфа.

Третья теорема Фредгольма. Уравнение $Tx = y$ разрешимо $\Leftrightarrow \ y \perp \ker T^*$.

Доказательство. Необходимость: рассмотрим даже более общий случай. Пусть уравнение $Bx = y$, где B – линейный ограниченный оператор, разрешимо, тогда $\forall\, z \in \ker B^*$ $(y, z) = (Bx, z) = (x, B^*z) = 0 \ \Rightarrow \ y \perp \ker B^*$.

Достаточность: в силу предыдущих теорем $H = \ker T^* \oplus \overline{R(T)} = \ker T^* \oplus R(T)$, поэтому если $y \perp \ker T^*$, то $y \in R(T)$. Теорема доказана.

§ 2. Первая теорема Фредгольма

Теорема (о конечности дефекта). $\operatorname{def} T < \infty$.

Доказательство. От противного: пусть $\operatorname{def} T = \infty$, тогда в $\ker T$ существует ОНБ $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Так как $e_k \xrightarrow{w} 0$, то $Ae_k \to 0$, что противоречит равенству $e_k = Ae_k$. Теорема доказана.

Следствие. $\operatorname{def} T^n < \infty$.

Вытекает из формулы $T^n = (E - A)^n = E - \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ – вполне непрерывный оператор.

Теорема (о стабилизации ядер). $\exists\, N:\ \ker T \subset \ldots \subset \ker T^{N-1} \subset \ker T^N = \ker T^{N+1} = \ldots$ (включение строгое).

Доказательство. Очевидно, $\ker T^n \subseteq \ker T^{n+1}$. В силу предыдущей теоремы все эти ядра конечномерны.

Пусть при каком-то N $\ker T^N = \ker T^{N+1}$, тогда докажем, что $\ker T^{N+1} = \ker T^{N+2}$: если $x \in \ker T^{N+2}$, то $Tx \in \ker T^{N+1} \Rightarrow Tx \in \ker T^N \Rightarrow x \in \ker T^{N+1}$.

Докажем, что такое N существует. От противного: пусть $\forall\, n$ $\ker T^n \neq \ker T^{n+1}$, тогда $\ker T^{n+1} = \ker T^n \oplus \left(\ker T^n\right)^{\perp}$. Построим последовательность единичных векторов $\{e_n\}$: $e_{n+1} \in \left(\ker T^n\right)^{\perp} \Rightarrow T^{n+1} e_{n+1} = 0$, $T^n e_{n+1} \neq 0$, $e_{n+1} \perp e_1, \ldots, e_n$, т.е. эта последовательность ортонормированная. Так как $e_n \xrightarrow{w} 0$, то $Ae_{n+1} = e_{n+1} - Te_{n+1} \to 0$; с другой стороны, $e_{n+1} \perp \ker T^n$, $Te_{n+1} \in \ker T^n \Rightarrow e_{n+1} \perp Te_{n+1} \Rightarrow \|Ae_{n+1}\|^2 = \|e_{n+1}\|^2 + \|Te_{n+1}\|^2 \geq 1$. Теорема доказана.

Докажем теперь основное утверждение этого параграфа.

Первая теорема Фредгольма. Уравнение $Tx = y$ разрешимо для любой правой части $\Leftrightarrow$ $\ker T = \{0\}$.

Доказательство. $\Rightarrow$ От противного: пусть $Tx_1 = 0$, $x_1 \neq 0$, тогда $\exists\, x_2$: $Tx_2 = x_1$, и т.д. Заметим, что $x_n \in \ker T^n$, но $x_n \notin \ker T^{n-1}$, что противоречит теореме о стабилизации ядер.

$\Leftarrow$ $\ker T = \{0\}$ $\Rightarrow$ по третьей теореме Фредгольма уравнение $T^* x = y$ всегда разрешимо $\Rightarrow$ $\ker T^* = \{0\}$ $\Rightarrow$ уравнение $Tx = y$ всегда разрешимо. Теорема доказана.

§ 3. Вторая теорема Фредгольма

Вторая теорема Фредгольма. $\operatorname{def} T = \operatorname{def} T^* < \infty$.

Доказательство. Конечность дефектов была доказана ранее. Пусть $\operatorname{def} T = n$, $\operatorname{def} T^* = m > n$, тогда построим ОНБ $x_1, \ldots, x_n$ в $\ker T$ и ОНБ $y_1, \ldots, y_m$ в $\ker T^*$. Рассмотрим оператор $\tilde{T} = E - \tilde{A}$: $\tilde{T}x = Tx + \sum_{k=1}^{n} (x, x_k) y_k$. Очевидно, $\tilde{T} - T$ конечномерный, следовательно, вполне непрерывный, а значит, $\widetilde{A}$ также вполне непрерывный.

Исследуем $\ker\widetilde{T}$. Заметим, что $Tx \perp y_k$: $(Tx, y_k) = (x, T^* y_k) = 0$, $k = \overline{1, m}$, поэтому по теореме Пифагора $\|\widetilde{T}x\|^2 = \|Tx\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x, x_k)|^2$. Следовательно, если $\widetilde{T}x = 0$, то $Tx = 0$ и $x \perp x_k$, $k = \overline{1, n}$ $\Rightarrow$ $x \in \ker T$ и $x \perp \ker T$ $\Rightarrow$ $\ker\widetilde{T} = \{0\}$ $\Rightarrow$ уравнение $\widetilde{T}x = y$ всегда разрешимо. Но уравнение $\widetilde{T}x = y_{n+1}$ неразрешимо, поскольку $\widetilde{T}x \perp y_{n+1}$. Теорема доказана.

Аудиофайл: Z0000166

§ 4. Общее операторное уравнение. Альтернатива Фредгольма

Рассмотрим теперь общее операторное уравнение (1)

$$(A - \lambda E)x = y,$$

где $\lambda \in \mathrm{C}$, $\lambda \neq 0$, A – вполне непрерывный оператор.

Уравнение (1) можно переписать в виде (2)

$$(E - \widetilde{A})x = \widetilde{y},$$

где $\widetilde{y} = -y / \lambda$, $\widetilde{A} = -A / \lambda$.

Применяя к уравнению (2) доказанные выше утверждения, получаем следующие теоремы.

Первая теорема Фредгольма. Уравнение (1) разрешимо для любой правой части тогда и только тогда, когда $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$.

Вторая теорема Фредгольма. $\operatorname{def}(A - \lambda E) = \operatorname{def}(A^* - \overline{\lambda}E) < \infty$.

Третья теорема Фредгольма. Уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда $y \perp \ker(A^* - \overline{\lambda}E)$.

Альтернатива Фредгольма. Либо уравнение (1) разрешимо для любой правой части, либо $\ker(A - \lambda E) \neq \{0\}$.

Глава 10. Спектральная теория линейных ограниченных операторов

§ 1. Спектр оператора

Пусть X – банахово пространство.

Определение. $\lambda \in \mathrm{C}$ называется регулярной точкой линейного оператора $A : X \to X$, если выполнены следующие три условия:

1^0. $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$.

2^0. $R(A - \lambda E) = X$.

3^0. $(A - \lambda E)^{-1}$ существует, определен на всем пространстве и ограничен.

Множество всех регулярных точек оператора A будем обозначать $\rho(A)$.

Определение. Множество $\sigma(A) = \mathrm{C} \setminus \rho(A)$ называется спектром оператора A.

Замечание. Если A ограниченный, то в силу теоремы Банаха из 1^0 и 2^0 вытекает 3^0.

Теорема. Если A ограниченный, $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda \in \rho(A)$.

Вытекает из доказанного ранее утверждения об обратимости оператора $E - B$ при $\|B\| < 1$.

Можно доказать и более сильное утверждение: если $r(A)$ – спектральный радиус оператора A, $|\lambda| > r(A)$, то $\lambda \in \rho(A)$.

Оператор $R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ называется резольвентой оператора A.

Аудиофайлы: Z0000167, Z0000168

Теорема. Если A ограниченный, $\lambda \in \rho(A)$, $|\Delta| < 1/\|R_A(\lambda)\|$, то $\lambda + \Delta \in \rho(A)$.

Достаточно заметить, что $A - (\lambda + \Delta)E = (A - \lambda E)(E - \Delta R_A(\lambda))$.

Следствие 1. $R_A(\lambda + \Delta) = (E - \Delta R_A(\lambda))^{-1} R_A(\lambda)$.

Следствие 2. $\rho(A)$ открыто.

Следствие 3. $R_A(\lambda + \Delta) - R_A(\lambda) = \left((E - \Delta R_A(\lambda))^{-1} - E\right) R_A(\lambda) = \Delta (E - \Delta R_A(\lambda))^{-1} R_A^2(\lambda)$,

$$\|R_A(\lambda + \Delta) - R_A(\lambda)\| \le |\Delta| \left\|(E - \Delta R_A(\lambda))^{-1}\right\| \|R_A(\lambda)\|^2 < \frac{|\Delta| \|R_A(\lambda)\|^2}{1 - |\Delta| \|R_A(\lambda)\|} \xrightarrow[\Delta \to 0]{} 0.$$

Теорема (тождество Гильберта). Если A ограниченный, $\lambda, \mu \in \rho(A)$, то

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu) R_A(\lambda) R_A(\mu) = (\lambda - \mu) R_A(\mu) R_A(\lambda).$$

Достаточно умножить обе части первого равенства на $A - \lambda E$ слева и $A - \mu E$ справа.

Теорема. Если H – гильбертово пространство, $A : H \to H$ – линейный ограниченный оператор, то $\sigma(A) \ne \varnothing$.

Доказательство. От противного. Пусть $\sigma(A) = \varnothing$, тогда рассмотрим $f(\lambda) = (R_A(\lambda)x, y)$, где $x, y \in H$, $x \ne 0$. В силу тождества Гильберта эта функция аналитическая во всей комплексной плоскости, т.е. целая, а в силу очевидной оценки резольвенты она исчезает на бесконечности. Следовательно, по теореме Лиувилля $f(\lambda) \equiv 0$. Положим теперь $y = R_A(\lambda)x$, тогда $R_A(\lambda)x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$. Теорема доказана.

§ 2. Точечный, непрерывный и остаточный спектр

Точки спектра можно классифицировать в зависимости от того, какое из условий регулярности нарушается.

Определение. Если $\ker(A - \lambda E) \ne \{0\}$, то говорят, что λ принадлежит точечному спектру $\sigma_p(A)$. Если $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$, но $R(A - \lambda E) \ne X$, причем $\overline{R(A - \lambda E)} = X$, то говорят, что λ принадлежит непрерывному спектру $\sigma_c(A)$. Если $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$, но $\overline{R(A - \lambda E)} \ne X$, то говорят, что λ принадлежит остаточному спектру $\sigma_r(A)$.

Таким образом, $\sigma(A)=\sigma_p(A)\coprod\sigma_c(A)\coprod\sigma_r(A)$.

Пример 1. $X=C[0,1]$, $(Ax)(t)=tx(t)$. Очевидно, A – линейный ограниченный оператор, $\|A\|\le 1$, поэтому если $|\lambda|>1$, то $\lambda\in\rho(A)$. Уравнение (1) $(A-\lambda E)x=y$ принимает вид $(t-\lambda)x(t)=y(t)$. Очевидно, если $\lambda\notin[0,1]$, то $x(t)=y(t)/(t-\lambda)$, так что $\lambda\in\rho(A)$.

Пусть теперь $\lambda\in[0,1]$, тогда уравнение (1) может быть разрешимо только при условии $y(\lambda)=0$. Это условие сохраняется при замыкании в равномерной норме, поэтому $\overline{R(A-\lambda E)}\ne X$, так что $\lambda\in\sigma_r(A)$.

Пример 2. $X=L_p(0,1)$, $(Ax)(t)=tx(t)$. Аналогично показывается, что если $\lambda\notin[0,1]$, то $\lambda\in\rho(A)$.

Пусть теперь $\lambda\in[0,1]$. Возьмем в уравнении (1) правую часть вида

$$y_\varepsilon(t)=\begin{cases} y(t), |t-\lambda|\ge\varepsilon,\\ 0, |t-\lambda|<\varepsilon.\end{cases}$$

Эта функция обращается в нуль в некоторой окрестности точки λ, поэтому $y_\varepsilon(t)/(t-\lambda)\in X$. Множество $\{y_\varepsilon(t)\}$ плотно в X, поэтому $\overline{R(A-\lambda E)}=X$ и $\lambda\in\sigma_c(A)$.

<u>Аудиофайлы: Z0000169, Z0000170</u>

Пример 3. $X=l_2$ (гильбертово пространство), $A(x_1,x_2,x_3,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots)$ (сдвиг вправо). Легко показать, что $A^*(x_1,x_2,\dots)=(x_2,x_3,\dots)$ (сдвиг влево). Очевидно, $\|A\|=\|A^*\|=1$ и $\lambda\in\rho(A)$ при $|\lambda|>1$.

Рассмотрим $\ker(A-\lambda E)$: $(0,x_1,x_2,\dots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\dots)$. Если $\lambda\ne 0$, то $x=0$. Если $\lambda=0$, то также $x=0$. Итак, $\ker(A-\lambda E)=\{0\}$.

Рассмотрим $\ker(A^*-\lambda E)$: $(x_2,x_3,\dots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots)$. Отсюда вытекает, что $x_n=\lambda^{n-1}x_1$ и $\ker(A^*-\lambda E)=\{(1,\lambda,\lambda^2,\dots)\}$, $|\lambda|<1$, поэтому $\{|\lambda|<1\}\in\sigma_p(A^*)$.

Изучим спектр операторов A и A^*. Пусть $|\lambda|<1$. Так как $X=\overline{R(A-\lambda E)}\oplus\ker(A^*-\bar\lambda E)$ и $\ker(A^*-\bar\lambda E)\ne\{0\}$, то $\overline{R(A-\lambda E)}\ne X$, поэтому $\{|\lambda|<1\}\in\sigma_r(A)$.

Пусть теперь $|\lambda|=1$. Так как спектр замкнут, то $\{|\lambda|=1\}\in\sigma(A),\sigma(A^*)$. Так как $\ker(A^*-\bar\lambda E)=\{0\}$, то $\overline{R(A-\lambda E)}=X$. Так как $\ker(A-\lambda E)=\{0\}$, то $\{|\lambda|=1\}\in\sigma_c(A)$. Кроме того, так как $X=\overline{R(A^*-\bar\lambda E)}\oplus\ker(A-\lambda E)$, то $\overline{R(A^*-\bar\lambda E)}=X$. Так как $\ker(A^*-\bar\lambda E)=\{0\}$, то $\{|\lambda|=1\}\in\sigma_c(A^*)$.

§ 3. Спектр вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве

H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – линейный вполне непрерывный оператор.

Теорема. Если $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, то $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Достаточно заметить, что в рассматриваемом случае условия $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$ и $R(A - \lambda E) = H$ эквивалентны в силу первой теоремы Фредгольма, поэтому если $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$, то $\lambda \in \rho(A)$.

Теорема. Если $\dim H = \infty$, то $0 \in \sigma(A)$.

Доказательство. От противного: пусть $0 \in \rho(A)$, тогда $\ker A = \{0\}$, $R(A) = H$ и существует ограниченный $A^{-1}: H \to H$. Но тогда $I = A^{-1}A$ – вполне непрерывный оператор, что в бесконечномерном случае неверно. Теорема доказана.

Пример. $H = L_2(0,1)$, $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$. Пусть $\lambda \neq 0$. Уравнение на собственные значения: $\int_0^t x(\tau)d\tau = \lambda x(t)$. Так как $x(t+\delta) - x(t) = \int_t^{t+\delta} x(\tau)d\tau / \lambda \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$, то решение $x(t)$ – непрерывная функция. Далее, интеграл $\int_0^t x(\tau)d\tau$ непрерывно дифференцируем, поэтому $x(t)$ – дифференцируемая функция. Следовательно, интегральное уравнение эквивалентно задаче Коши для ОДУ: $\lambda x'(t) = x(t)$, $x(0) = 0$, не имеющей нетривиальных решений. Таким образом, $\sigma(A) = \{0\}$. Заметим, что спектральный радиус этого оператора равен нулю. Кроме того, $\ker A = \{0\}$, так как если $\int_0^t x(\tau)d\tau = 0$, то $\int_E x(\tau)d\tau = 0$ для любого измеримого множества E, откуда следует, что $x(t) = 0$ п.в.

Теорема. Если $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \sigma(A)$, то $\lambda_n \to 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что все с.з. попарно различны и ненулевые. Легко видеть, что отвечающие им с.ф. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($Ax_n = \lambda_n x_n$) линейно независимы. Ортогонализируя с.ф., получаем ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $e_n \in L(x_1, \dots, x_n)$. Так как $Ae_n = (A - \lambda_n E)e_n + \lambda_n e_n$ и $(A - \lambda_n E)e_n \perp e_n$, то по теореме Пифагора $\|Ae_n\|^2 = \|(A - \lambda_n E)e_n\|^2 + \|\lambda_n e_n\|^2 \geq |\lambda_n|^2$. Осталось заметить, что $\|Ae_n\| \to 0$. Теорема доказана.

Аудиофайлы: Z0000171, Z0000172

§ 4. Спектр ограниченного самосопряженного оператора

H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – линейный ограниченный самосопряженный оператор (если не оговорено противное).

Теорема 1. Норму оператора A можно найти по формуле

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Доказательство. Обозначим через

$$\mu = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Очевидно, $\mu \le \|A\|$. Докажем противоположное неравенство. Так как $\forall\, x, y \in H$

$$(A(x+y), x+y) = (Ax, x) + (Ay, y) + 2\operatorname{Re}(Ax, y),$$
$$(A(x-y), x-y) = (Ax, x) + (Ay, y) - 2\operatorname{Re}(Ax, y),$$

то

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) = 4\operatorname{Re}(Ax, y),$$

откуда следует оценка

$$4|\operatorname{Re}(Ax, y)| \le \mu\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = 2\mu\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

(последнее равенство – это тождество параллелограмма).

При $\|x\| = \|y\| = 1$ получаем оценку

$$|\operatorname{Re}(Ax, y)| \le \mu,$$

откуда $\forall\, x, y \in H$ вытекает оценка

$$|\operatorname{Re}(Ax, y)| \le \mu \|x\| \|y\|.$$

Положив $y = Ax$, получим оценку

$$\|Ax\|^2 = |\operatorname{Re}(Ax, Ax)| \le \mu \|x\| \|Ax\|,$$

или $\|Ax\| \le \mu \|x\|$, откуда и вытекает неравенство $\|A\| \le \mu$. Теорема доказана.

Теорема 2. Линейный ограниченный оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}(Ax, x) = 0 \quad \forall\, x \in H$.

Доказательство. Необходимость: $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$.

Достаточность: определим операторы

$$A_R = \frac{A + A^*}{2}, \quad A_I = \frac{A - A^*}{2i}.$$

Легко видеть, что эти операторы самосопряженные и $A = A_R + iA_I$. Далее, $\forall\, x \in H$

$$\operatorname{Im}(Ax, x) = \operatorname{Im}((A_R x, x) + i(A_I x, x)) = (A_I x, x) = 0,$$

поэтому по теореме 1

$$\|A_I\| = \sup_{\|x\|=1} |(A_I x, x)| = 0,$$

откуда следует, что $A = A^*$. Теорема доказана.

Теорема 3. $\sigma(A) \in \mathrm{R}$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \ne 0$, тогда определим оператор $A_\alpha = A - \alpha E = A_\alpha^*$.

Из оценки

$$\|(A-\lambda E)x\|^2 = \|(A_\alpha - i\beta E)x\|^2 = ((A_\alpha - i\beta E)x, (A_\alpha - i\beta E)x) =$$

$$= \|A_\alpha x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 + i\beta(A_\alpha x, x) - i\beta(x, A_\alpha x) = \|A_\alpha x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2$$

вытекает, что $\ker(A-\lambda E) = \{0\}$. Так как

$$H = \overline{R(A-\lambda E)} \oplus \ker(A-\overline{\lambda}E),$$

то $\overline{R(A-\lambda E)} = H$. Докажем, что $R(A-\lambda E) = H$. Пусть $y_n = (A-\lambda E)x_n$, $y_n \to y$, тогда

$$\|y_m - y_n\|^2 = \|(A-\lambda E)(x_m - x_n)\|^2 \geq \beta^2\|x_m - x_n\|^2,$$

следовательно, $\{x_n\}$ фундаментальна, поэтому $\exists\, x \in H:\ x_n \to x$. Переходя к пределу в равенстве $y_n = (A-\lambda E)x_n$, в силу ограниченности оператора получаем, что $y = (A-\lambda E)x \in R(A-\lambda E)$. Таким образом, $\lambda \in \rho(A)$. Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, $\sigma(A) \in [-\|A\|, \|A\|]$.

Лемма. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Достаточно заметить, что если $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, $x, y \neq 0$, $\lambda \neq \mu$, то $\lambda, \mu \in \mathrm{R}$, $\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \mu(x, y) \Rightarrow (x, y) = 0$.

§ 5. Теорема Гильберта-Шмидта для вполне непрерывных самосопряженных операторов

H – гильбертово пространство, $A: H \to H$ – линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор.

Обозначим через

$$M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x),\ -m = \inf_{\|x\|=1}(Ax, x).$$

Лемма. $\sigma(A) \in [-m, M]$. Если $\dim H = \infty$, то $0 \in [-m, M]$.

Достаточно вспомнить, что ненулевые точки спектра – это собственные значения, и заметить, что если $Ax = \lambda x$, $\|x\| = 1$, то $\lambda = (Ax, x)$.

Теорема. $\exists\, \lambda \in \sigma_p(A):\ |\lambda| = \|A\|$.

Доказательство. Так как

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}|(Ax, x)|,$$

то $\|A\| = M$ или $\|A\| = m$. Не ограничивая общности, полагаем $\|A\| = M$. Докажем, что $M \in \sigma_p(A)$. По определению точной верхней грани $\exists\, \{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$: $(Ax_n, x_n) \to M$. Выберем $\{n_k\}$: $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Так как

$$0 \le \left\|(A-ME)x_{n_k}\right\|^2 = \left\|Ax_{n_k}\right\|^2 - 2M\,\mathrm{Re}\left(Ax_{n_k}, x_{n_k}\right) + M^2 \to \|Ax\|^2 - M^2 \le 0,$$

то $\left\|(A-ME)x_{n_k}\right\| \to 0$, откуда следует, что $x_{n_k} \to x$ и $\|x\| = 1$. В пределе получаем $\|(A-ME)x\| = 0$, т.е. $Ax = Mx$, $x \ne 0$. Теорема доказана.

Теорема Гильберта-Шмидта. В $\overline{R(A)}$ существует полная ортонормированная система собственных векторов оператора A, отвечающих $\lambda \ne 0$.

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. В силу предыдущей теоремы $\exists\, \lambda_1 \in \mathrm{R}$, $\exists\, x_1 \in H$: $|\lambda_1| = \|A\|$, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $\|x_1\| = 1$. Обозначим через $H_1 = L(x_1)$. Легко видеть, что $H_1^{\perp}$ инвариантно относительно A: если $x \in H_1^{\perp}$, т.е. $x \perp x_1$, то $(Ax, x_1) = (x, Ax_1) = (x, \lambda_1 x_1) = 0$, т.е. $Ax \in H_1^{\perp}$. Сужение оператора A на подпространство $H_1^{\perp}$ обладает теми же свойствами, поэтому $\exists\, \lambda_2 \in \mathrm{R}$, $\exists\, x_2 \in H_1^{\perp}$: $|\lambda_2| = \left\|A \,|\, H_1^{\perp}\right\| \le |\lambda_1|$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, $\|x_2\| = 1$ (если $\lambda_2 = 0$, то $R(A) = H_1$, и все доказано). Аналогично, строим $H_2 = L(x_1, x_2)$, и т.д.

2. Если на каком-то этапе $\lambda_n = 0$, то все доказано. Предположим, что $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots > 0$, и покажем, что построенная система $\{x_n\}$ полна в $\overline{R(A)}$. Пусть $y \in R(A)$, тогда $\exists\, x \in H$: $Ax = y$. Приблизим элемент конечной суммой его ряда Фурье:

$$y - \sum_{k=1}^{n} (y, x_k)x_k = Ax - \sum_{k=1}^{n} (x, Ax_k)x_k = A\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, x_k)x_k\right).$$

Так как

$$x - \sum_{k=1}^{n} (x, x_k)x_k \in H_n^{\perp},$$

то

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} (y, x_k)x_k \right\| \le \left\|A \,|\, H_n^{\perp}\right\| = |\lambda_{n+1}| \to 0,$$

что означает, что $\{x_n\}$ полна в $R(A)$. Если $y \in \overline{R(A)}$, то его можно приблизить элементом $\tilde{y} \in R(A)$, откуда и вытекает, что $\{x_n\}$ полна в $\overline{R(A)}$. Теорема доказана.

Следствие. Так как $H = \overline{R(A)} \oplus \ker A$, то, дополнив базис подпространства $\overline{R(A)}$ базисом подпространства $\ker A$ (если последнее ненулевое), получим ОНБ в H.

<u>Аудиофайлы: Z0000173, Z0000174</u>

Теорема Гильберта-Шмидта для интегрального оператора. Рассмотрим интегральный оператор

$$(Ax)(t) = \int_D K(t, \tau)x(\tau)d\tau, \ t \in D,$$

где

1) $K(t,\tau)=\overline{K(\tau,t)}$;

2) область D ограничена;

3) $\int\limits_D |K(t,\tau)|^2 d\tau \le C \quad \forall\, t \in D$.

Далее полагаем $H=L_2(D)$.

Теорема. Если функция $y(t)=(Ax)(t)$ (истокообразно представима), то ряд Фурье по собственным функциям интегрального оператора сходится абсолютно и равномерно к функции $y(t)$ в области D.

Доказательство. Оператор A линейный, ограниченный, вполне непрерывный в силу оценки

$$\int\limits_D \int\limits_D |K(t,\tau)|^2 dt d\tau \le \int\limits_D C dt = C\mu(D) = \text{const},$$

вытекающей из условия 3, и самосопряженный, поэтому к нему применима теорема Гильберта-Шмидта. В силу этой теоремы ряд Фурье по собственным функциям для функции $y=Ax$ сходится в $L_2(D)$. Докажем, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Воспользуемся критерием Коши:

$$\sum_{k=n}^{n+m} |(y,e_k)||e_k(t)| = \sum_{k=n}^{n+m} |(Ax,e_k)||e_k(t)| = \sum_{k=n}^{n+m} |(x,Ae_k)||e_k(t)| =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m} |\lambda_k||(x,e_k)||e_k(t)| = \sum_{k=n}^{n+m} |(x,e_k)||Ae_k(t)| \le \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} |(x,e_k)|^2}\,\sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} |Ae_k(t)|^2} \le \varepsilon\sqrt{C},$$

так как в силу неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Ae_k(t)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int\limits_D K(t,\tau) e_k(\tau) d\tau \right|^2 \le \int\limits_D |K(t,\tau)|^2 d\tau \le C.$$

Теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим краевую задачу Дирихле для оператора Лапласа:

$$\Delta u = f, \ t \in D,$$

$$u\big|_{\partial D} = 0.$$

Как известно, в этом случае существует полная ортонормированная система собственных функций:

$$\Delta u_k + \lambda_k u_k = 0, \ k = 1, 2, \ldots .$$

Обратный оператор будет интегральным:

$$u(t) = \int\limits_D G(t,\tau) f(\tau) d\tau,$$

где $G(t,\tau)$ – функция Грина. Как известно, на диагонали $t=\tau$ функция Грина имеет логарифмическую особенность в R^2 и особенность порядка $N-2$ в R^N, откуда вытекает, что эта функция удовлетворяет условию 3 при $N = 2, 3$. При $N \geq 4$ нужно представить решение в виде некоторой степени оператора, удовлетворяющего условию 3: $u = A^m f$, или $y = A^m x$, чтобы получить равномерную и абсолютную сходимость ряда Фурье. Но это означает, что y является решением задачи

$$\Delta^m y = x,\ t \in D,$$

$$y\big|_{\partial D} = \Delta y\big|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{m-1} y\big|_{\partial D} = 0.$$

Выполнение этих краевых условий вытекает из свойств функции Грина.

Глава 11. Нелинейные операторы. Теорема Шаудера о неподвижной точке

§ 1. Теорема Брауэра о неподвижной точке и ее обобщения

Теорема Брауэра. Любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя в конечномерном нормированном пространстве имеет неподвижную точку.

Ограничимся одномерным случаем. Пусть $f(x)$ непрерывно отображает $[-1,1]$ в $[-1,1]$, тогда рассмотрим $F(x) = f(x) - x$. Очевидно, $F(x)$ непрерывна, $F(-1) = f(-1) + 1 \geq 0$, $F(1) = f(1) - 1 \leq 0$. В силу свойств непрерывной функции существует $\xi \in [-1,1]$: $F(\xi) = 0$, что и требовалось доказать.

Докажем вспомогательные утверждения.

Определение. Выпуклой оболочкой точек $x^1, \ldots, x^m$ называется множество

$$CL(x^1, \ldots, x^m) = \left\{ x \,\middle|\, x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x^k,\ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0 \right\}.$$

Пример. В двумерном случае это отрезок, в трехмерном – треугольник.

Лемма 1. Если D – выпуклое множество, $x^1, \ldots, x^m \in D$, то $CL(x^1, \ldots, x^m) \subset D$.

Доказательство. Если $\alpha_m = 1$, то очевидно, иначе представим в виде

$$x = (1 - \alpha_m)\left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_m} x^k \right) + \alpha_m x^m.$$

Таким образом, достаточно показать для $m - 1$ точек, а стало быть, для двух точек, а это вытекает из условия. Лемма доказана.

Лемма 2. Выпуклая оболочка – выпуклое множество.

Легко убедиться, что выпуклая оболочка вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок.

<u>Аудиофайл: Z0000175</u>

Лемма 3. Выпуклая оболочка – замкнутое множество.

Доказательство. Пусть $\{y^k\}$ – фундаментальная последовательность,

$y^k \in CL(x^1, \dots, x^m)$, тогда

$$y^k = \alpha_1^k x^1 + \dots + \alpha_m^k x^m .$$

Так как $0 \le \alpha_1^k \le 1$, то из $\{\alpha_1^k\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_1^{r_k}\}$. Так как $0 \le \alpha_2^{r_k} \le 1$, то из $\{\alpha_2^{r_k}\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, и т.д. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $\{\alpha_l^k\}$ сходится, $1 \le l \le m$; обозначим через

$$\alpha_l = \lim_{k\to\infty} \alpha_l^k, \ 1 \le l \le m, \ y = \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_m x^m .$$

Очевидно, $y \in CL(x^1, \dots, x^m)$. Так как

$$\|y^k - y\| = \|(\alpha_1^k - \alpha_1)x^1 + \dots + (\alpha_m^k - \alpha_m)x^m\| \le |\alpha_1^k - \alpha_1|\|x^1\| + \dots + |\alpha_m^k - \alpha_m|\|x^m\| \to 0,$$

то $y^k \to y$. Лемма доказана.

Лемма 4. Если $e_1, \dots, e_m$ – базис пространства, то $CL(e_1, \dots, e_m, 0)$ содержит внутреннюю точку.

Доказательство. Покажем, что такой точкой будет, например,

$$y = \frac{e_1 + \dots + e_m}{m+1} .$$

В самом деле, всякий вектор x представим в виде $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$. Пусть $\|x - y\| \le \delta$. По теореме Хана-Банаха существуют линейные ограниченные функционалы $f_j(x)$, $j = \overline{1, m}$, такие что $f_j(e_k) = \delta_{jk}$. Применим их к разности $x - y$:

$$f_j(x-y) = f_j\left(\left(\alpha_1 - \frac{1}{m+1}\right)e_1 + \dots + \left(\alpha_m - \frac{1}{m+1}\right)e_m\right) = \alpha_j - \frac{1}{m+1}, \ j = \overline{1, m} .$$

Следовательно,

$$\left|\alpha_j - \frac{1}{m+1}\right| = |f_j(x-y)| \le \|f_j\|\|x-y\| \le C\delta, \ j = \overline{1, m}, \ C = \max_{1\le j\le m}\|f_j\| .$$

Отсюда вытекает, что $0 \le \alpha_j \le 1$, $j = \overline{1, m}$, если δ достаточно мало, и

$$\left|\alpha_1 + \dots + \alpha_m - \frac{m}{m+1}\right| \le Cm\delta .$$

Положим теперь $\alpha_{m+1} = 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)$, тогда $0 \le \alpha_{m+1} \le 1$, если δ достаточно мало, следовательно, $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} 0 \in CL(e_1, \dots, e_m, 0)$. Лемма доказана.

Обобщенная теорема Брауэра. Любое непрерывное отображение замкнутого выпуклого ограниченного множества, содержащего хотя бы одну внутреннюю точку, в себя в конечномерном нормированном пространстве имеет неподвижную точку.

§ 2. Теорема Шаудера

X – бесконечномерное банахово пространство, $D \subset X$ – замкнутое ограниченное множество, A – определенный на D нелинейный вполне непрерывный (непрерывный и компактный) оператор.

Аудиофайлы: Z0000177, Z0000178

Теорема Шаудера. Любое вполне непрерывное отображение замкнутого выпуклого ограниченного множества в себя в банаховом пространстве имеет неподвижную точку.

Доказательство разобьем на три пункта.

1. Пусть неподвижной точки не существует, тогда докажем, что $\exists\, \varepsilon_0 > 0$: $\|Ax - x\| \geq \varepsilon_0$ $\forall\, x \in D$. В самом деле, в противном случае $\exists \{x_n\}$, $x_n \in D$:

$$\|Ax_n - x_n\| \to 0. \qquad (*)$$

Так как $\{x_n\}$ ограничена, то $\{Ax_n\}$ предкомпактна, т.е. $\exists \{n_k\}$: $\{Ax_{n_k}\}$ сходится. Но тогда в силу (*) сходится и $\{x_{n_k}\}$, причем $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$ в силу замкнутости D. Переходя к пределу в (*) по подпоследовательности $\{n_k\}$, получаем, что $Ax = x$, т.е. что существует неподвижная точка – противоречие.

2. Не ограничивая общности, можем считать, что $0 \in D$. В самом деле, если $0 \notin D$, то зафиксируем произвольную точку $x_0 \in D$ и положим $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{D} = D - x_0$, $\tilde{A}\tilde{x} = A(x_0 + \tilde{x}) - x_0$. Заметим, что $\tilde{A}$ переводит $\tilde{D}$ в себя и $0 \in \tilde{D}$. Если у $\tilde{A}$ существует неподвижная точка, то она существует и у A: $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{x} \;\Rightarrow\; A(x_0 + \tilde{x}) = x_0 + \tilde{x}$.

3. Зафиксируем ε: $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и построим для AD конечную ε-сеть $y_1, \ldots, y_n \in AD$:

$$AD \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \varepsilon).$$

Обозначим через $K_\varepsilon = CL(y_1, \ldots, y_n, 0)$. Элементы $y_1, \ldots, y_n$ могут быть линейно зависимыми, поэтому выберем из них максимальное линейно независимое подмножество (перенумеровав элементы при необходимости) $y_1, \ldots, y_m$, $m \leq n$. Обозначим через $N_\varepsilon = CL(y_1, \ldots, y_m, 0)$. В силу лемм 2 и 3 K_ε и N_ε выпуклы и замкнуты. В силу леммы 4 N_ε имеет внутреннюю точку, а в силу леммы 1 $N_\varepsilon \subset K_\varepsilon \subset D$. Таким образом, K_ε выпукло, замкнуто, ограничено и имеет внутреннюю точку. Проектор Шаудера $A_\varepsilon : D \to D$, действующий по правилу

$$A_\varepsilon x = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mu_k(x) y_k}{\sum_{k=1}^{n} \mu_k(x)},$$

где

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 0, \|Ax - y_k\| > \varepsilon, \\ \varepsilon - \|Ax - y_k\|, \|Ax - y_k\| \le \varepsilon, \end{cases}$$

отображает K_ε в K_ε, поэтому по обобщенной теореме Брауэра существует неподвижная точка x_ε: $A_\varepsilon x_\varepsilon = x_\varepsilon$. Но тогда $\|Ax_\varepsilon - x_\varepsilon\| = \|Ax_\varepsilon - A_\varepsilon x_\varepsilon\| \le \varepsilon$, что противоречит неравенству $\|Ax_\varepsilon - x_\varepsilon\| \ge \varepsilon_0$ (см. пункт 1). Теорема доказана.

<u>Аудиофайл: Z0000179</u>

§ 3. Применения теоремы Шаудера

Краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$x''' + x''x^2 = 0,\ t \in (0,1),$$

$$x(0) = a,\ x'(0) = b,\ x(1) = c.$$

Записав уравнение в виде

$$(\ln x'')' + x^2 = 0,$$

находим, что

$$x'' = A\exp\left(-\int_0^t x^2(\tau)d\tau\right),$$

откуда, с учетом первых двух краевых условий,

$$x(t) = a + bt + A\int_0^t d\tau \int_0^\tau \exp\left(-\int_0^\xi x^2(\eta)d\eta\right)d\xi.$$

Третье краевое условие дает соотношение

$$a + b + A\int_0^1 d\tau \int_0^\tau \exp\left(-\int_0^\xi x^2(\eta)d\eta\right)d\xi = c,$$

откуда

$$A = \frac{c - a - b}{\int_0^1 d\tau \int_0^\tau \exp\left(-\int_0^\xi x^2(\eta)d\eta\right)d\xi}.$$

Таким образом, исходная задача сводится к уравнению $x = F(x)$, где

$$F(x(t)) = a + bt + (c - a - b)\frac{\int_0^t d\tau \int_0^\tau \exp\left(-\int_0^\xi x^2(\eta)d\eta\right)d\xi}{\int_0^1 d\tau \int_0^\tau \exp\left(-\int_0^\xi x^2(\eta)d\eta\right)d\xi}.$$

Будем решать это нелинейное интегральное уравнение в пространстве $C[0,1]$. В качестве замкнутого шара возьмем $B(0, R)$, где $R = |a| + |b| + |c - a - b|$. Легко видеть, что если

$|x(t)| \le R$, то и $|F(x(t))| \le R$, т.е. $F: B(0, R) \to B(0, R)$.

Докажем, что оператор вполне непрерывен. Непрерывность: если $x_n(t) \rightrightarrows x(t)$, то

$$\exp\left(-\int_0^\xi x_n^2(\eta)d\eta\right) \rightrightarrows \exp\left(-\int_0^\xi x^2(\eta)d\eta\right),$$

откуда следует, что $F(x_n(t)) \rightrightarrows F(x(t))$. Компактность: по теореме Арцела. Равномерная ограниченность в шаре очевидна, а равностепенная непрерывность вытекает из оценки

$$|F(x(t'')) - F(x(t'))| = \left| b(t'' - t') + (c - a - b) \frac{\int_{t'}^{t''} d\tau \int_0^\tau \exp\left(-\int_0^\xi x^2(\eta)d\eta\right)d\xi}{\int_0^1 d\tau \int_0^\tau \exp\left(-\int_0^\xi x^2(\eta)d\eta\right)d\xi} \right| \le$$

$$\le |b||t'' - t'| + \frac{|c - a - b| \left| \int_{t'}^{t''} d\tau \int_0^\tau d\xi \right|}{\int_0^1 d\tau \int_0^\tau \exp\left(-\int_0^\xi R^2 d\eta\right)d\xi}.$$

Таким образом, оператор удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера, откуда следует разрешимость.

<u>Аудиофайл: Z0000180</u>

Нелинейное интегральное уравнение. Рассмотрим следующее уравнение:

$$x(t) = \int_0^1 K(t, \tau)x^3(\tau)d\tau + f(t),\ t \in [0, 1],$$

$$f \in C[0, 1],\ K \in C([0, 1] \times [0, 1]),\ K_0 = \max|K|.$$

Будем решать это нелинейное интегральное уравнение в пространстве $C[0, 1]$. В качестве замкнутого шара возьмем $B(0, R)$, где R – корень уравнения $R = K_0 R^3 + \|f\|$. Обозначим $h(t) = K_0 t^3 - t + \|f\|$, тогда $h'(t) = 3K_0 t^2 - 1$, $t_\pm = \pm 1/\sqrt{3K_0}$, $h_{\min} = h(t_+) = \|f\| - 2/\left(3\sqrt{3K_0}\right)$. Таким образом, достаточным условием существования такого корня R будет неравенство $\|f\| \le 2/\left(3\sqrt{3K_0}\right)$. Будем предполагать, что это условие выполнено. Обозначим через $0 < R_* \le R^*$ нули функции $h(t)$.

<u>Аудиофайл: Z0000181</u>

Легко видеть, что шар $B(0, R^*)$ отображается в себя. Непрерывность и компактность оператора очевидны.

В шаре $B(0, R_*)$ отображение будет сжимающим, поэтому в этом шаре неподвижная точка существует и единственна.

Теорема Лере-Шаудера. Начнем со следующего утверждения. Обозначим через B замкнутый шар $\overline{B(0, R)}$, через X – банахово пространство.

<u>Аудиофайл: Z0000182</u>

Теорема. Пусть A – вполне непрерывный оператор, отображающий B в X, уравнение $Ax = \xi x$, $\xi > 1$, не имеет решений на сфере $\|x\| = R$, тогда в шаре B у оператора A существует неподвижная точка.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\tilde{A}$, действующий по правилу

$$\tilde{A}x = \begin{cases} Ax, \|Ax\| \le R, \\ RAx / \|Ax\|, \|Ax\| > R. \end{cases}$$

Легко видеть, что оператор $\tilde{A}$ непрерывен, компактен и отображает шар B в себя, поэтому у него существует неподвижная точка x: $\tilde{A}x = x$. Если $\|Ax\| > R$, то $Ax = \xi x$, где $\xi = \|Ax\| / R > 1$, и $\|x\| = \|\tilde{A}x\| = \|RAx / \|Ax\|\| = R$, что противоречит условию, поэтому $\|Ax\| \le R$, следовательно, x будет неподвижной точкой и для оператора A. Теорема доказана.

Теорема об остром угле. Пусть A – вполне непрерывный оператор, отображающий B в X, и $\|Ax\| \le \|x\|$, $\|x\| = R$, тогда в шаре B у оператора A существует неподвижная точка.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы достаточно рассмотреть случай, когда уравнение $Ax = \xi x$, $\xi > 1$, имеет решение на сфере $\|x\| = R$. В этом случае $\|Ax\| = \xi\|x\| > \|x\|$, что противоречит условию. Теорема доказана.

Теорема Лере-Шаудера. Пусть A – вполне непрерывный оператор, отображающий X в X, все решения уравнения $\mu Ax = x$ при всех $0 < \mu < 1$ удовлетворяют условию $\|x\| \le C$, тогда в шаре достаточно большого радиуса у оператора A существует неподвижная точка.

<u>Аудиофайлы: Z0000183, Z0000184</u>

Доказательство. Рассмотрим шар радиуса $R > C + 1$ и запишем уравнение в виде $Ax = \xi x$, где $\xi = 1/\mu > 1$. По условию это уравнение не имеет решений на сфере радиуса R, следовательно, у A в этом шаре существует неподвижная точка. Теорема доказана.

Теорема. Пусть A – вполне непрерывный оператор, отображающий X в X,

$$\overline{\lim_{\|x\| \to +\infty}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = q < 1,$$

тогда в шаре достаточно большого радиуса у оператора A существует неподвижная точка.

Достаточно заметить, что на сфере достаточно большого радиуса $\|Ax\| \le \|x\|$, поэтому существование неподвижной точки вытекает из теоремы об остром угле.